Free fields realizations of $mathcal{W}$-algebras (Various Issues relating to Representation Theory and Non-commutative Harmonic Analysis)

元良, 直輝

数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 75-79

Free fields realizations of $\mathcal{W}$-algebras

京都大学・数理解析研究所　元良 直輝 *

Naoki Genra
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

概要

The $\mathcal{W}$-algebras are vertex superalgebras defined by the generalized Drinfeld-Sokolov reductions. We show that the $\mathcal{W}$-algebras for generic levels are constructed as intersections of kernels of screening operators and give some applications for free fields realizations of the $\mathcal{W}$-algebras.

1 研究の背景

二次元共形場理論の中で Zamolodchikov らによって発展した $\mathcal{W}$ 代数は, Feigin-Frenkel によって一般の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と複素数 k に付随して, Drinfeld-Sokolov 還元によって拡張されて定義された (これを $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ と表す). これは Fateev-Lukyanov によるスクリーニング作用素によって定義された A_n 型, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数と一致した [FL, FF]. さらに一般に次のような定理が成り立つことを証明されている (これを $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現と呼ぶ):

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [FF]). k を generic とすると, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\, dz.$$

ただし $\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\, dz$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルート α_i に付随するスクリーニング作用素, $\nu = \sqrt{k+h^\vee}$, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である.

ところが Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は, B_n 型の Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n+1})$ と一致しなかった. 一方で Kac-Roan-Wakimoto は Feigin-Frenkel の定義を拡張し, $\mathfrak{g}, k$ およびべき零元 $f \in \mathfrak{g}$ に付随して $\mathcal{W}$ 代数を定義した (第 3 章参照). このとき $\mathfrak{g}$ は Lie 代数のみならず Lie 超代数の場合にまで拡張された. すると彼らの計算によって, Fateev-Lukyanov による B_1 型の $\mathcal{W}$ 代数が Lie 超代数 $\mathfrak{osp}(1,2)$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数に一致することが示された (ただし f は正則べき零元となるようにとる). 一般には次のように予想されていた ([IMP, Watts]):

予想 1.2. $k \neq -n - \frac{1}{2}(= h^\vee)$ に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1,2n)) \simeq \mathcal{W}B_n^k.$$

ただし $\mathcal{W}B_n^k$ は Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数である.

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

本稿ではこの予想を証明する．そのためにより一般的な自由場実現に関する定理 (定理 4.1, 4.2) を証明し，さらなる応用として定理 4.4 を証明する．

2　頂点代数

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が頂点代数であるとは，0 でないベクトル $\mathbf{1} \in V$, V 上の線形写像 $\partial : V \to V$, さらに V から V 上の線形写像を係数にもつ形式的べき級数全体 $\mathrm{End}V[[z]]$ (z は独立変数) への線形写像

$$Y : V \ni \ A \ \longmapsto \ Y(A,z) = A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \mathrm{End}V[[z]]$$

が与えられていて，次を満たしているときをいう：

- (局所ローラン級数) 任意の $A, B \in V$ に対し，$A_{(n)}B = 0$ for all $n \gg 0$.
- (真空ベクトル) $Y(\mathbf{1},z) = \mathrm{Id}_V$ であり，任意の $A \in V$ に対し，$Y(A,z)\cdot \mathbf{1}|_{z\to 0} = A$.
- (変換作用素) $\partial \cdot \mathbf{1} = 0$ かつ $[\partial, Y(A,z)] = Y(\partial A, z)$.
- (局所性) 任意の $A, B \in V$ に対し，ある $N \in \mathbb{Z}$ が存在し，$(z-w)^N [Y(A,z), Y(B,w)] = 0$.

$A \in V$ に対し $A(z)$ を A に対応する V 上の場という．二つ目の条件から Y が単射であることが分かる．よって V 上のベクトルと Y の像は一対一対応になっており，これを場と状態の対応という．また V が超ベクトル空間 ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けされたベクトル空間) のとき，$\mathbf{1} \in V$ および ∂, Y のパリティが even かつ局所性の括弧積を超括弧積と見なすことにすれば，V は頂点超代数の構造をもつという．

3　$\mathcal{W}$ 代数

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 Lie 代数または basic classical な Lie 超代数，$f \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の (パリティが even な) べき零元，$k \in \mathbb{C}$, Γ を $\mathfrak{g}$ の半整数次数付け

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

であって，f に関する"good" な条件 ($f \in \mathfrak{g}_{-1}$ であって，$\mathrm{ad}f : \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq -\frac{1}{2}$ のとき単射かつ $j \leq -\frac{1}{2}$ のとき全射) を満たすとする．このとき $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H(C_k^\bullet(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$$

が定義される [KRW]．ただし $(C_k^\bullet(\mathfrak{g}, f; \Gamma), d)$ は $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する (一般化された) Drinfeld-Sokolov 還元によって定義されるコホモロジー複体である．このとき $C_k^\bullet(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は頂点超代数の構造をもち，そのコホモロジーである $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ も $C_k^\bullet(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ から誘導された頂点超代数構造をもつ．

ペア $(\mathfrak{g}, f)$ に対し，Jacobson-Molozov の定理から $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{e, h, f\} \subset \mathfrak{g}$ が存在し，このとき半単純元 $x = \frac{1}{2}h$ は随伴作用によって $\mathfrak{g}$ に半整数次数付けを与え，これは f について good な次数付けになる．したがって f について good な Γ はいつでも存在する．一方で，$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は Γ のと

り方によらず同じ頂点超代数構造をもつことが知られている．そこで $\mathfrak{g}, f, k$ に付随する (同じ頂点超代数構造をもつ)$\mathcal{W}$ 代数を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と表す．f が $\mathfrak{g}$ の正則べき零元のとき，これは Feigin-Frenkel によって定義された $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ と一致する．

4 主結果

主定理を述べるためにいくつか定義を準備する．まず三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{>0} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{<0}$$

に付随する制限ルート系 ([BG]) を Δ^Γ とする．すなわち $\mathfrak{g}_0$ に含まれる Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ によって定まるルート系を Δ, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$$

とすると $\Delta^\Gamma = \Delta_{>0} \sqcup \Delta_{<0}$ である．Δ^Γ の正ルートを $\Delta_{>0}$ とする base を Π^Γ とおく．Π^Γ は $\Delta_{>0}$ のうち indecomposable なルートの集まりになる．$\Delta_{>0} \subset \Delta_+$ となるように Δ の単純ルート Π をとる．Δ から誘導される Π と Π^Γ への半整数次数付けを Π_j, Π_j^Γ とすると，$\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_{\frac{1}{2}} \sqcup \Pi_1$, $\Pi^\Gamma = \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma \sqcup \Pi_1^\Gamma$ が成り立つ．ここで $\alpha \in \Pi^\Gamma$ に対し，

$$[\alpha] = (\alpha + \bigoplus_{\beta \in \Pi_0} \mathbb{Z}\beta) \cap \Pi^\Gamma, \quad [\Pi^\Gamma] = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi^\Gamma\}$$

とする．$[\alpha]$ の元は α と同じ次数をもつ．$\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$ に対し，

$$[\alpha] = [\beta] \iff \alpha - \beta \in \bigoplus_{\gamma \in \Pi_0} \mathbb{Z}\gamma$$

が成り立つ．$V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ とその不変双線形形式

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

(ただし $u, v \in \mathfrak{g}_0$ は任意, $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の最長ルートの長さの二乗を 2 に正規化した非退化双線形形式, $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式) に付随するアファイン頂点超代数とする．$u \in \mathfrak{g}_0$ に対応する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 上の場を $u(z)$ とおくと，$u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u,v](w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ．ただし右辺は左辺の $z = w$ に関する特異部のみを表示している (作用素積展開という)．$F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ とその超反対称双線形形式

$$< u \mid v >= (f \mid [u,v])$$

($u, v \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ は任意) に付随する中立フェルミオン頂点超代数とする．$e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} (\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}})$ に対応する $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ 上の場を $\Phi_\alpha(z)$ とおくと，$\alpha, \beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}$ に対し

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{< u \mid v >}{z-w}$$

が成り立つ．次が主定理である．

定理 4.1. k を generic とする．このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される：

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)\simeq\bigcap_{[\beta]\in[\Pi_1^\Gamma]}\mathrm{Ker}\sum_{\alpha\in[\beta]}(f|e_\alpha)\int S^\alpha(z)\,dz\ \cap\bigcap_{[\beta]\in[\Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma]}\mathrm{Ker}\sum_{\alpha\in[\beta]}\int S^\alpha(z)\Phi_\alpha(z)\,dz.$$

ただし $S^\alpha(z)$ は $\alpha\in\Pi^\Gamma$ に付随する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ に作用するスクリーニング作用素 ([G]) である．

特に $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ となるように Γ がとれるとき $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ は $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ に一致する．また $\Pi^\Gamma=\Pi$ であり

$$S^\alpha(z)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha(z)}$$

が成り立つ．ただし $\nu=\sqrt{k+h^\vee}$, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である．したがって次を得る．

定理 4.2. $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ かつ k が generic のとき, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)$ は $\mathcal{H}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される：

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f;\Gamma)\simeq\bigcap_{\substack{\alpha\in\Pi_1\\(f|e_\alpha)\neq0}}\mathrm{Ker}\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha(z)}\,dz\ \cap\bigcap_{\alpha\in\Pi_{\frac{1}{2}}}\mathrm{Ker}\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha(z)}\Phi_\alpha(z)\,dz.$$

$\mathfrak{g}$ が Lie 代数かつ f を正則べき零元とすると $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ となり, このとき定理 4.2 は定理 1.1 を復元する．また $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(1,2n)$ かつ f を ($\mathfrak{g}$ の even パートの) 正則べき零元とすると $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ なる good な次数付けが存在し, 定理 4.2 を適用すると次が得られる:

命題 4.3.

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1,2n))=\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha_i(z)}\,dz\ \cap\mathrm{Ker}\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha_n(z)}\Psi(z)\,dz.$$

右辺の式は Fateev-Lukyanov の B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数の定義に一致するので, これで予想 1.2 が証明された．

予想 1.2 は定理 4.2 を用いて証明されたが, 定理 4.1 にも応用がある．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ かつ f を副正則べき零元として, 定理 4.1 を適用すると次が得られる (詳細は略).

定理 4.4. $k\neq-n(=h^\vee)$ に対し,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f)\simeq\mathcal{W}_n^{(2),k}.$$

ただし $\mathcal{W}_n^{(2),k}$ は Feigin-Semikhatov の $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数 ([FS]) である．

定理 4.4 は $n=2,3$ のとき知られており, 一般には予想とされていた ([ACGHR]).

参考文献

[ACGHR] H. R. Afshar, T. Creutzig, D. Grumiller, Y. Hikida, P. B. Rønne. Unitary W-algebras and three-dimensional higher spin gravities with spin one symmetry. *J. High Energy Phys.*, (6), 063, 2014.

[BG] J. Brundan, S. M. Goodwin. Good grading polytopes. *Proc. Lond. Math. Soc., (3)*, 94(1):155–180, 2007.

[FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.

[FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.

[FS] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov. $\mathcal{W}_n^{(2)}$-algebras. *Nuclear Phys., B* 698(3):409–449, 2004.

[G] N. Genra. Screening operators for $\mathcal{W}$-algebras. arXiv:1606.00966.

[IMP] K. Ito, J. O. Madsen, J. L. Petersen. Free field representations of extended superconformal algebras. *Nuclear Phys., B* 398(2):425–458, 1993.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[Watts] G. M. T. Watts. WB_n symmetry, Hamiltonian reduction and $B(0,n)$ Toda theory. *Nuclear Phys., B* 361(1):311–336, 1991.